模块三 离散型随机变量及其分布

第 1 节 条件概率公式、全概率公式（★★★）

内容提要

本节包含条件概率公式、乘法公式、全概率公式三部分内容，考试的重点是能够用它们去求概率，以及证明一些概率恒等式. 下面先梳理这些公式及有关性质.

1．条件概率公式：在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$. 计算条件概率常用两种方法.

①基于样本空间 Ω，分别计算 $P(A)$ 和 $P(AB)$，代上述条件概率公式求 $P(B|A)$.

②根据条件概率的直观意义，以 A 作为新的样本空间，来求事件 B 发生的概率. 如图 1，$P(B|A)$ 即为在 A 中考虑 B 发生的概率，所以 $P(B|A)$ 等于阴影部分的样本点个数除以事件 A 的样本点个数.

2．条件概率的性质：

① $P(\Omega|A)=1$；②若 B，C 互斥，则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$；③ $P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)$.

3．乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B|A)$，这一公式就是条件概率公式的变形. 实际上，$P(AB)$ 也可写成 $P(B)P(A|B)$，实际应用时选择 A 还是 B 作为条件，要看问题中 $P(B|A)$，$P(A|B)$ 哪个好算，通常情况下，已知前面的试验结果，计算后面试验结果的概率比较好算，所以我们常选择以前面的试验结果为条件.

4．全概率公式：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意的事件 $B\subseteq\Omega$，有 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$. 用全概率公式求概率，其本质是将样本空间划分成若干个部分，如图 2，在每一部分上分别求事件 B 的概率，再相加，所以找到合适的划分样本空间的方法是解题的关键. 若把样本空间按事件 A 是否发生来划分，则可以得出 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$，如图 3，这是全概率公式的一种特殊情况.

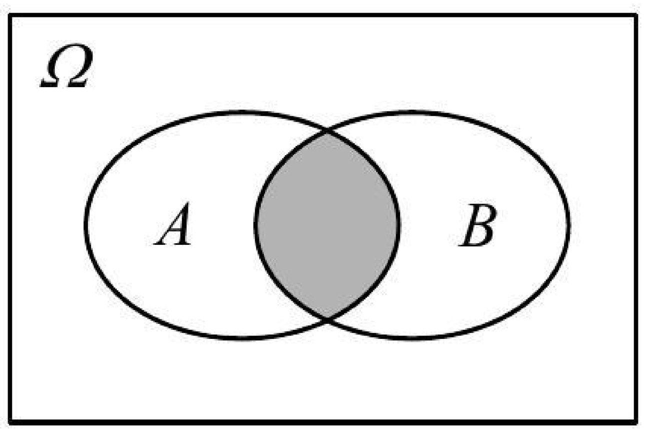


图1

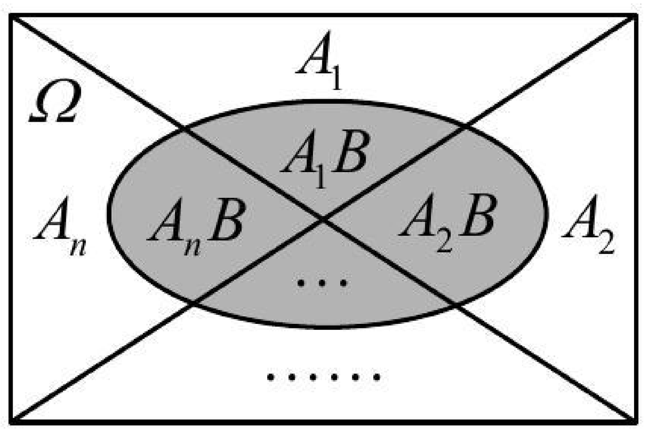


图2

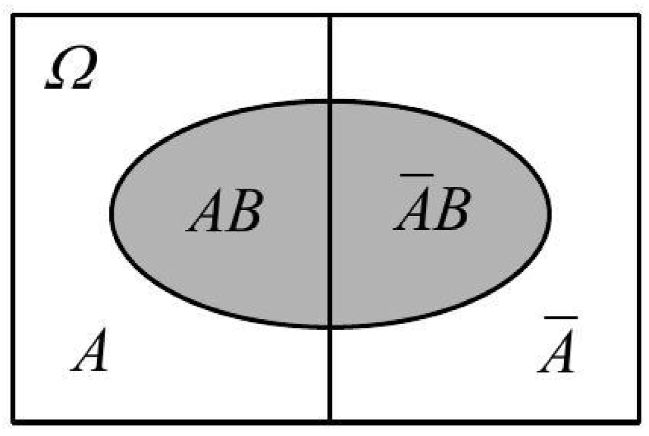


图3

典型例题

类型Ⅰ：计算条件概率

【例 1】设 100 件产品中有 70 件一等品，25 件二等品，规定一、二等品为合格品，从中任取 1 件，在已知取得的是合格品的条件下，它是一等品的概率为_____.

解法 1：要算条件概率，可套用条件概率公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，故只需求出 $P(AB)$ 和 $P(A)$，

设取到合格品为事件 A，取到一等品为事件 B，因为 $B \subseteq A$，所以 $AB=B$，故 $P(AB)=P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{70}{100}$，

又 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{70+25}{100}=\dfrac{95}{100}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{14}{19}$.

解法 2：也可根据条件概率的直观意义，以取到合格品为新的样本空间来考虑，

因为已经确定取到的是合格品，那么它必定是 95 件合格品中的 1 件，这其中一等品有 70 件，

所以取到的是一等品的概率为 $\dfrac{C_{70}^1}{C_{95}^1}=\dfrac{70}{95}=\dfrac{14}{19}$.

答案：$\dfrac{14}{19}$

【变式 1】已知某同学投篮一次命中率为 $\dfrac{9}{10}$，连续两次均投中的概率是 $\dfrac{1}{2}$，则该同学在投中一次后，随后一次也投中的概率是（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{2}{5}$　　（C）$\dfrac{3}{5}$　　（D）$\dfrac{5}{9}$

解析：记该同学第一次投中为事件 A_1，第二次投中为事件 A_2，

投中一次后，随后一次也投中的概率即为 $P(A_2|A_1)$，故套用条件概率公式即可，

由题意，$P(A_1)=\dfrac{9}{10}$，$P(A_1A_2)=\dfrac{1}{2}$，所以 $P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{10}}=\dfrac{5}{9}$.

答案：D

【变式 2】从 1，2，3，4，5，6，7，8，9 中不放回地依次取 2 个数，记事件 A 为“第一次取到的是奇数”，事件 B 为“第二次取到的是 3 的整数倍”，则 $P(B|A)=$_____.

解析：算条件概率可用公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，故只需算 $P(AB)$ 和 $P(A)$，先算简单的 $P(A)$，

由题意，样本空间包含的样本点数 $n(\Omega)=C_9^1C_8^1=72$，第一次取到的是奇数，则第一次有 C_5^1 种取法，

第二次可从余下的 8 个数字中取 1 个，有 C_8^1 种取法，所以 $n(A)=C_5^1C_8^1=40$，故 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{40}{72}$，

再算 $P(AB)$，$P(AB)=\dfrac{n(AB)}{n(\Omega)}$，分母已知，接下来求 $n(AB)$，第一次取到的为 1，3，5，7，9，取到 3，9 与另外三个，对第二次的取法有影响，故分类，

若第一次取到 3 或 9，则第一次有 C_2^1 种取法，此时 3，6，9 中已经取走了 1 个，

所以第二次也有 C_2^1 种取法，故共有 $C_2^1C_2^1=4$ 种取法；

若第一次取到 1，5，7，则第一次有 C_3^1 种取法，此时 3，6，9 都还没被取走，

所以第二次有 C_3^1 种取法，故共有 $C_3^1C_3^1=9$ 种取法；

所以 $n(AB)=4+9=13$，从而 $P(AB)=\dfrac{n(AB)}{n(\Omega)}=\dfrac{13}{72}$，故 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{13}{40}$.

答案： $\dfrac{13}{40}$

【总结】计算条件概率，常用两种方法：①套用条件概率公式；②用条件的直观意义来缩小样本空间，以条件为新的样本空间，分析事件的概率.

类型Ⅱ：用乘法公式求 $P(AB)$

【例 2】已知 $P(A|B)=\dfrac{3}{7}$，$P(B)=\dfrac{7}{9}$，则 $P(AB)=$（　　）

（A）$\dfrac{3}{7}$　　（B）$\dfrac{4}{7}$　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）$\dfrac{27}{49}$

解析：结合已知可发现，直接套用乘法公式即可求 $P(AB)$，由乘法公式，$P(AB)=P(B)P(A|B)=\dfrac{7}{9}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{3}$.

答案：C

【变式】已知市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂产品占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂产品的合格率是 80%，则从市场上随机买一个灯泡，买到甲厂生产的合格灯泡的概率是（　　）

（A）0.665　　（B）0.56　　（C）0.24　　（D）0.285

解析：根据要求的是买到甲厂的合格灯泡的概率，可设买到甲厂灯泡为事件 A，买到合格灯泡为事件 B，要求的即为 $P(AB)$，A 和 B 不独立，故 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，可用乘法公式算，该选谁为条件？先把已知条件用符号表示出来，由题意，有 $P(A)=0.7$，$P(\overline{A})=0.3$，$P(B|A)=0.95$，$P(B|\overline{A})=0.8$，观察发现，可选 A 为条件，用 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 来算，

由题意，$P(A)=0.7$，$P(B|A)=0.95$，所以 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.7\times0.95=0.665$.

答案：A

【总结】当事件 A，B 不独立时，可用乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 来计算 $P(AB)$；而当 A，B 相互独立时，由于 $P(B|A)=P(B)$，所以 $P(AB)=P(A)P(B)=P(A)P(B|A)$，故这一公式其实是乘法公式的特例.

类型Ⅲ：用全概率公式计算概率

【例 3】甲、乙为完全相同的两个不透明袋子，袋内均装有除颜色外完全相同的球. 甲袋中装有 5 个白球，7 个红球，乙袋中装有 4 个白球，2 个红球，从两个袋中随机抽取一袋，再从该袋中随机摸出 1 个球，则摸出的球是红球的概率为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{11}{24}$　　（C）$\dfrac{7}{12}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

解析：两袋中各自摸出红球的概率是已知的，故可按取到哪一袋来划分样本空间，套用全概率公式，

记取到甲袋为事件 A_1，取到乙袋为事件 A_2，取到红球为事件 B，

由全概率公式，$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{11}{24}$.

答案：B

【反思】用全概率公式求事件 B 的概率，关键是选择合适的方法将样本空间 Ω 划分成 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，在各部分上分别计算事件 B 的概率，再相加. 例如，本题将样本空间划分成了摸出的球来自甲袋和摸出的球来自乙袋两种情况，这样一划分，分别计算摸到红球的概率就简单了.

【变式 1】某芯片制造厂有甲、乙、丙三条生产线均生产 5mm 规格的芯片，现有 25 块该规格的芯片，其中甲、乙、丙生产的芯片分别为 5 块、10 块、10 块，若甲、乙、丙生产该芯片的次品率分别为 0.1，0.2，0.3，则从这 25 块芯片中任取一块芯片，取到正品的概率为（　　）

（A）0.78　（B）0.64　（C）0.58　（D）0.48

解析：甲、乙、丙的次品率不同，故应按取到的芯片来自甲、乙、丙划分样本空间，套用全概率公式，

记取到的芯片来自甲、乙、丙分别为事件 A_1，A_2，A_3，取到正品为事件 B，则由全概率公式，

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{5}{25}\times(1-0.1)+\frac{10}{25}\times(1-0.2)+\frac{10}{25}\times(1-0.3)=0.78.$$

答案：A

【变式 2】某人连续两次对同一目标进行射击，若第一次击中目标，则第二次也击中目标的概率为 0.7，若第一次未击中目标，则第二次击中目标的概率为 0.5，已知第一次击中目标的概率是 0.8，则在第二次击中目标的条件下，第一次也击中目标的概率为（　　）

（A）$\frac{14}{25}$　（B）$\frac{14}{33}$　（C）$\frac{28}{33}$　（D）$\frac{25}{39}$

解析：设第一次击中目标为事件 A，第二次击中目标为事件 B，则所求概率 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，

故接下来要求 $P(AB)$ 和 $P(B)$，先罗列条件，已知的即为 $P(A)=0.8$，$P(B|A)=0.7$，$P(B|\bar{A})=0.5$.

对比所求，故可用 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 算 $P(AB)$，用 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$ 算 $P(B)$，

$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.8\times0.7=0.56$，$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

$=0.8\times0.7+(1-0.8)\times0.5=0.66$，所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.56}{0.66}=\frac{28}{33}$.

答案：C

【反思】本题的流程其实是求包含条件概率问题的通法，分三步：①先设出涉及的事件；②将题目的条件用概率符号罗列出来；③对比条件概率公式与全概率公式，选择合适的公式套用已知的数据.

【例 4】有研究显示，人体内某部位的直径约 10mm 的结节约有 0.2%的可能性会在 1 年内发展为恶性肿瘤，某医院引进一台检测设备，可以通过无创的血液检测，估计患者体内直径约 10mm 的结节是否会在 1 年内发展为恶性肿瘤，若检测结果为阳性，则提示该结节会在 1 年内发展为恶性肿瘤，若检测结果为阴性，则

提示该结节不会在 1 年内发展为恶性肿瘤. 这种检测的准确率为 85%，即一个会在 1 年内发展为恶性肿瘤的患者有 85%的可能性被检测出阳性，一个不会在 1 年内发展为恶性肿瘤的患者有 85%的可能性被检测出阴性. 患者甲被检查出体内长了一个直径约 10mm 的结节，他做了该项无创血液检测.

（1）求患者甲检测结果为阴性的概率；

（2）若患者甲的检测结果为阴性，求他的这个结节在 1 年内发展为恶性肿瘤的概率.（保留 5 位小数）

解：(1)（检测结果为阴性，而实际是否会在 1 年内发展为恶性肿瘤都有可能，故可按此划分样本空间，套用全概率公式）

设患者甲的该结节在 1 年内发展为恶性肿瘤为事件 A，患者甲的检测结果为阴性为事件 B，

由全概率公式，$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.2\%\times(1-85\%)+(1-0.2\%)\times 85\%=0.8486$.

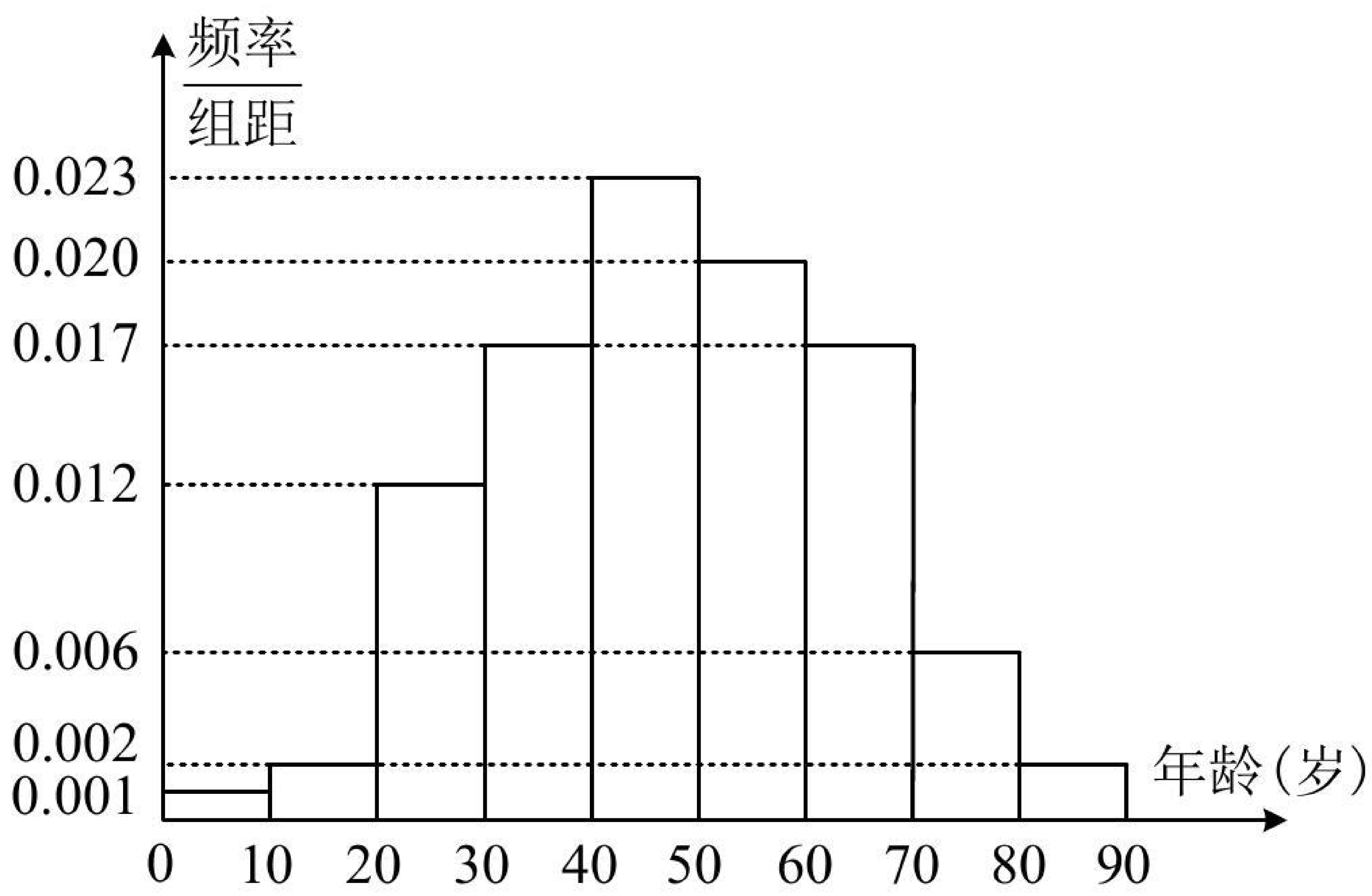
（2）由（1）可得 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{0.8486}$，（要算 $P(AB)$，可用乘法公式，且应转换成以 A 为条件）

因为 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.2\%\times(1-85\%)=0.0003$，所以 $P(A|B)=\dfrac{0.0003}{0.8486}\approx 0.00035$.

【总结】从上述几题可以看出，问题的情景可能简单，可能复杂，用全概率公式求概率的关键都是结合所给信息划分样本空间，可能划分成两部分（如例 3 等），也可能划分成三部分（如变式 1 等），甚至更多.

类型Ⅳ：条件概率、全概率公式综合题

【例 5】(2022・新高考Ⅱ卷）在某地区进行某种疾病调查，随机调查了 100 位这种疾病患者的年龄，得到如下样本数据的频率分布直方图.



（1）估计该地区这种疾病患者的平均年龄；（同一组数据用该区间的中点值作代表）

（2）估计该地区一位这种疾病患者年龄位于区间 $[20,70)$ 的概率；

（3）已知该地区这种疾病的患病率为 0.1%，该地区年龄位于 $[40,50)$ 的人口数占该地区总人口数的 16%，从该地区选出 1 人，若此人的年龄位于 $[40,50)$，求此人患这种疾病的概率.（精确到 0.0001）

解：(1) 由图可知，从左至右，各组的频率依次为 0.01，0.02，0.12，0.17，0.23，0.2，0.17，0.06，0.02，所以 $\bar{x}=5\times0.01+15\times0.02+25\times0.12+35\times0.17+45\times0.23+55\times0.2+65\times0.17+75\times0.06+85\times0.02=47.9$，故该地区这种疾病患者的平均年龄约为 47.9 岁.

（2）由图可知该地区一位这种疾病患者年龄位于 $[20,70)$ 的概率 $P=1-(0.01+0.02+0.06+0.02)=0.89$.

（3）（读完题可知要算的是年龄位于$[40,50)$的条件下患这种疾病的概率，求条件概率，当然考虑套用条件概率公式，先把作为条件的事件和求概率的事件设出来）

设事件A为“任选一人年龄位于$[40,50)$”，事件B为“任选一人患这种疾病”，

则所求概率为$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，由题意，$P(A)=16\%=0.16$，所以$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{0.16}$ ①，

（由频率分布直方图能得到的是患病者的年龄分布，所以在患病的条件下，年龄位于各区间的概率都已知，即$P(A|B)$已知，故故应转换条件为B，用乘法公式$P(AB)=P(B)P(A|B)$求$P(AB)$）

由题意，$P(B)=0.1\%$，由频率分布直方图可知$P(A|B)=0.23$，所以$P(AB)=P(B)P(A|B)=0.1\%\times0.23$，

代入①得$P(B|A)=\dfrac{0.1\%\times0.23}{16\%}\approx0.0014$.

【例 6】某种电子玩具按下按钮后，会出现亮红灯或绿灯. 已知按钮第一次按下后，出现红灯与绿灯的概率都是$\dfrac{1}{2}$，从第二次按下按钮起，若前一次出现红灯，则下一次出现红灯的概率为$\dfrac{1}{5}$，若前一次出现绿灯，则下一次出现红灯的概率为$\dfrac{3}{5}$，记第$n(n\in\mathbf{N}^*)$次按下按钮后出现红灯的概率为P_n.

（1）求P_2的值；

（2）证明：$\left\{P_n-\dfrac{3}{7}\right\}$为等比数列，并求$P_n$.

解：（1）（P_2表示第 2 次按下按钮后，亮红灯的概率，这一概率受第一次的结果影响，可按第一次亮红灯、绿灯划分样本空间，用全概率公式计算）

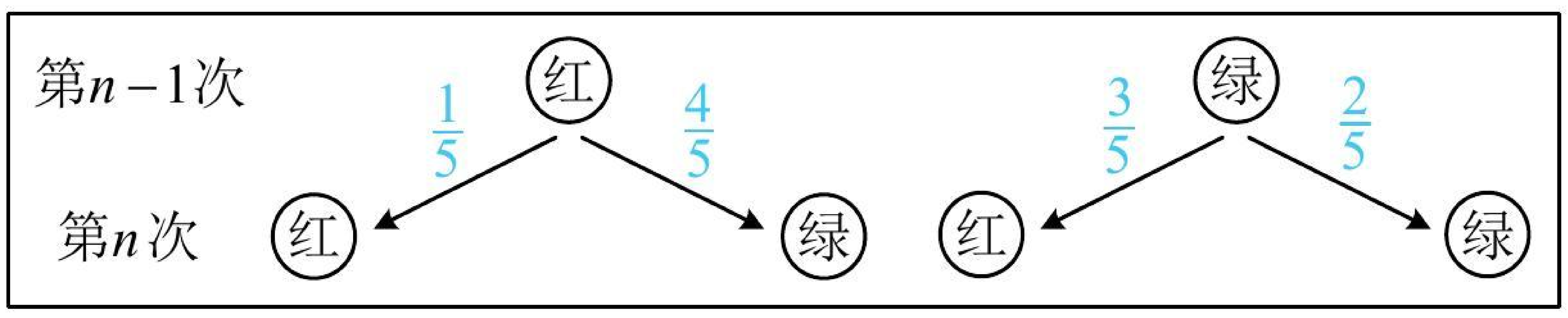
记第n次亮红灯为事件A_n，则$P_2=P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$.

（2）（应先建立$\{P_n\}$的递推公式，如图，第$n-1$次的亮灯结果不同，第n次亮红灯的概率也不同，故应按第$n-1$次的亮灯情况划分样本空间，套用全概率公式算P_n，第$n-1$次的亮灯情况有A_{n-1}和$\overline{A}_{n-1}$两种）

由全概率公式，$P_n=P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\overline{A}_{n-1})P(A_n|\overline{A}_{n-1})=P_{n-1}\cdot\dfrac{1}{5}+(1-P_{n-1})\cdot\dfrac{3}{5}=-\dfrac{2}{5}P_{n-1}+\dfrac{3}{5}(n\ge2)$，

所以$P_n-\dfrac{3}{7}=-\dfrac{2}{5}P_{n-1}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{7}=-\dfrac{2}{5}P_{n-1}+\dfrac{6}{35}=-\dfrac{2}{5}(P_{n-1}-\dfrac{3}{7})$，又$P_1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{14}$，

所以$\left\{P_n-\dfrac{3}{7}\right\}$是首项为$\dfrac{1}{14}$，公比为$-\dfrac{2}{5}$的等比数列，从而$P_n-\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{14}\times(-\dfrac{2}{5})^{n-1}$，故$P_n=\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{14}\times(-\dfrac{2}{5})^{n-1}$.



【反思】这种概率递推问题较新颖，但只要分析清第n次和第$n-1$次的事件联系，即可建立递推公式.

强化训练

1．（2023 • 辽宁模拟 • ★★）某班有 7 名班干部，其中 4 名男生，3 名女生，从中选出 3 人参加学校组织的社会实践活动，在男生甲被选中的情况下，女生乙也被选中的概率为_____.

2．（2023 • 湖南长沙模拟 • ★★）为参加学校组织的“喜迎十二大，奋进新征程”的演讲比赛，某班从班级初选的甲乙 2 名男生和 6 名女生中随机选取 5 名组成班级代表队参加比赛，则在代表队中既有男生又有女生的条件下，男生甲被选中的概率为（　　）

（A）$\frac{15}{36}$　（B）$\frac{5}{7}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{7}{10}$

3．（2023 • 全国甲卷 • ★★）某地的中学生中有 60%的同学爱好滑冰，50%的同学爱好滑雪，70%的同学爱好滑冰或爱好滑雪，在该地的中学生中随机调查一位同学，若该同学爱好滑雪，则该同学也爱好滑冰的概率为（　　）

（A）0.8　（B）0.6　（C）0.5　（D）0.4

4．（2023 • 辽宁营口模拟 • ★★）在射击比赛中，甲、乙两人对同一目标各进行一次射击，甲击中目标的概率为$\frac{3}{5}$，乙击中目标的概率为$\frac{4}{5}$，则在目标被击中的情况下，甲击中目标的概率为（　　）

（A）$\frac{3}{4}$　（B）$\frac{12}{25}$　（C）$\frac{15}{23}$　（D）$\frac{3}{7}$

5．（2022 • 湖南模拟 • ★★）某人忘记了一个电话号码的最后一个数字，只好去试拨，则他第一次失败，第二次成功的概率是_____.

6．（2023 •天津模拟 •★★）52 张扑克牌，没有大小王，无放回地抽取两次，则两次都抽到 2 的概率为_____.

7．（2023 • 浙江联考 • ★★★）已知随机事件 A，B 满足 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(A|B)=\frac{3}{4}$，则 $P(\bar{B}|A)=$ _____.

8．（2023 • 河北石家庄模拟 • ★★★）某种疾病的患病率为 5%，通过验血诊断该疾病的误诊率为 2%，即非患者中有 2%的人诊断为阳性，患者中有 2%的人诊断为阴性. 随机抽取 1 人进行验血，则其诊断结果为阳性的概率为（　　）

（A）0.46　（B）0.046　（C）0.68　（D）0.068

9．（2022 • 福建厦门模拟 • ★★★）某游泳小组共有 20 名运动员，其中一级运动员 4 人，二级运动员 8 人，三级运动员 8 人. 现举行一场游泳选拔比赛，若一、二、三级运动员能够晋级的概率分别是 0.9，0.7，0.4，则在这 20 名运动中任选一名运动员，他能够晋级的概率为（　　）

（A）0.58　（B）0.6　（C）0.62　（D）0.64

10．（2023 • 浙江模拟 • ★★★★）随着城市经济的发展，早高峰问题越发严重，上班族需要选择合理的出行方式，某公司员工小明上班出行的方式有三种，某天早上他选择自驾、坐公交车、骑共享单车的概率均为$\frac{1}{3}$，而他自驾、坐公交车、骑共享单车迟到的概率分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，结果这一天他迟到了，在此条件下，他自驾去上班的概率是_____.

11．（2022 • 重庆模拟 • ★★★）由于身体及心理方面的差异，人们往往认为女性驾驶员比男性驾驶员更容易发生交通事故. 为调查这一认识是否正确，同学们组成了调查小组，对其所在的城市进行了调查研究，结果显示：该市 2021 年男女驾驶员的比例为 7:3，男性驾驶员平均万人的发案率为 2.2，女性驾驶员平均万人的发案率为 0.25.（发案即发生交通事故，暂不区分其是否为肇事责任人）

（1）在 2021 年全市的驾驶员中随机抽取 1 人，若该人发案的概率为$a\times10^{-4}$，求 a 的值；

（2）若该市一名驾驶员在 2021 年发生了交通事故，则其为女性的概率是多少？（保留到小数点后三位）

12．（2023 • 新高考Ⅰ卷节选 • ★★★★）甲乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8，由抽签确定第一次投篮的人选，第一次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

（1）求第二次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率.